MATHEMATICS (LM39)

(Lecce - Università degli Studi)

Teaching

GenCod A007102

Owner professor Salvatore SICILIANO

Teaching in italian ALGEBRA SUPERIORE

Teaching

SSD code MAT/02

Reference course MATHEMATICS

Course type Laurea Magistrale

Credits 9.0

Teaching hours Front activity hours: 63.0

For enrolled in 2022/2023

Taught in 2023/2024

Course year 2

Language ITALIAN

Curriculum DIDATTICO

Location Lecce

Semester Second Semester

Exam type Oral

Assessment Final grade

Course timetable https://easyroom.unisalento.it/Orario

BRIEF COURSE DESCRIPTION	Il corso tratta gli aspetti principali della teoria degli anelli non commutativi e dei moduli su di essi.
REQUIREMENTS	**Prerequisiti:** conoscenze basilari di teoria dei gruppi, teoria degli anelli e algebra lineare.
COURSE AIMS	**Conoscenze e comprensione**. Risultati fondamentali e avanzati relativi alla Teoria degli Anelli e dei Moduli e problematiche di ricerca classiche e attuali correlati. **Capacità di applicare conoscenze e comprensione: #** essere in grado di produrre dimostrazioni rigorose, utilizzando con maturità le varie tecniche dimostrative**, #** essere in grado di formalizzare e risolvere matematicamente problemi di moderata difficoltà nell'ambito della Teoria degli Anelli e dei Moduli. **#**essere capaci di leggere e comprendere, in modo autonomo, testi avanzati e articoli di ricerca nell'ambito della Teoria degli Anelli. **Autonomia di giudizio.** L'esposizione dei contenuti e delle argomentazioni sarà svolta in modo da migliorare la capacità dello studente di identificare gli elementi rilevanti in situazioni e problemi anche in contesti non matematici, nonché di riconoscere ragionamenti logici erronei. **Abilità comunicative.** La presentazione degli argomenti sarà svolta in modo da consentire l'acquisizione di una buona capacità di comunicare in modo chiaro e privo di ambiguità problemi, idee e soluzioni riguardanti la Teoria degli Anelli e dei Moduli, ad un pubblico specializzato o generico. **Capacità di apprendimento.** Sarà sollecitato l'approfondimento di argomenti, correlati con
TEACHING METHODOLOGY	Lezioni frontali.
ASSESSMENT TYPE	Esame orale. La prova verifica l'abilità di esporre in modo chiaro e rigoroso alcuni contenuti del corso. Gli studenti dovranno prenotarsi all'esame, utilizzando esclusivamente le modalità on-line previste dal sistema VOL.

OTHER USEFUL INFORMATION	Orario di ricevimento: per appuntamento mediante e-mail all'indirizzo istituzionale del docente.

FULL SYLLABUS

Moduli su un anello: definizione e prime proprietà. Teoremi di omomorfismo per moduli. Teorema di corrispondenza per moduli. Somme dirette interne ed esterne di una famiglia di moduli. Moduli semplici. Lemma di Schur e conseguenze. Serie di composizione di un modulo. Teorema di Jordan-Hölder per moduli. Richiami sugli insiemi parzialmente ordinati ed il Lemma di Zorn. Moduli noetheriani ed artiniani. Un modulo ammette una serie di composizione se e solo se è noetheriano ed artiniano. Anelli noetheriani ed anelli artiniani.

Algebre su un anello commutativo e unitario. Algebra degli endomorfismi di un modulo. Algebre su campi. Rappresentazioni di algebre. Algebre di matrici. Algebre gruppali. Corpi ed algebre di divisione. Algebre dei quaternioni generalizzati. Anelli semplici. Algebre semplici. Semplicità degli anelli di matrici su corpi.

Moduli semisemplici e loro caratterizzazioni. Zoccolo di un modulo. La classe dei moduli semisemplici su un anello è chiusa per sottomoduli e quozienti. Condizioni di catena in moduli semisemplici. Componenti isotipiche di un modulo. Decomposizione di un modulo semisemplice nella somma diretta delle sue componenti isotipiche.

Annullatore di un sottoinsieme di un modulo. Ideali destri e sinistri di un anello. Radicale di Jacobson di un anello e caratterizzazioni. Il radicale di Jacobson di un anello coincide con l'intersezione degli ideali destri massimali. Elementi quasiregolari. Elementi nilpotenti. Elementi idempotenti. Versione sinistra del radicale di Jacobson di un anello. Lemma di Nakayama. Ideali nilpotenti. Nilpotenza del radicale di Jacobson in anelli artiniani a destra. Anelli semiprimi e semiprimitivi.

Sottoanelli densi dell'anello degli endomorfi di uno spazio vettoriale su un corpo. Teorema della Densità di Jacobson. Moduli fedeli. Anelli primitivi. Teorema del doppio centralizzante. Caratterizzazione degli anelli semplici ed artiniani a destra. Ideali destri minimali di un anello. Decomposizione di Pierce. Teorema di Hopkins. Anelli semisemplici e caratterizzazioni. Struttura di un anello semisemplice. Teorema di Wedderburn-Artin e sue conseguenze. Algebre semisemplici. Algebre semisemplici su campi algebricamente chiusi. Algebre di divisione di dimensione finita su un campo. Teorema di Maschke. Cenni di teoria della rappresentazione dei gruppi finiti. Complemento del radicale di Jacobson di un'algebra. Teorema di Wedderburn-Malcev.

Base di un modulo. Moduli liberi. Moduli proiettivi. Un modulo è proiettivo se e solo se è un addendo diretto di un modulo libero. Un anello è semisemplice se e solo se ogni suo modulo è proiettivo. Moduli indecomponibili. Ideali destri minimalmente potenti di un anello. Moduli proiettivi indecomponibili su anelli artiniani a destra. Rivestimento proiettivo di un modulo.

Modules over a ring. Isomorphism theorems for modules. Correspondence theorem for modules. Direct sum of submodules. Product and coproduct of modules. Simple modules. Schur's Lemma. Composition series of a module. Jordan-Hölder Theorem for modules. Noetherian and Artinian modules. A module has a finite composition series if and only if it is both an Artinian module and a Noetherian module. Noetherian and Artinian rings.
Algebras over commutative rings. Endomorphism algebra of a module. Algebras over fields. Representations of an algebra. Matrix algebras. Group algebras. Skew fields and division algebras. Generalized quaternion algebras. Simple rings. Simple algebras. Full matrix rings over division rings are simple.
Semisimple modules and characterizations. Socle of a module. The class of semisimple modules is closed under submodules and quotients. Chain conditions for semisimple modules. Isotypic components of a module. Decomposition of a module as a direct sum of its isotypic components. Annihilator of a subset of a module. Right ideals and left ideals of a ring. Jacobson radical of a ring and its characterizations. The Jacobson radical of a ring is the intersection of the maximal right

ideals. Quasiregular elements. Nilpotent elements. Idempotent elements. Left-handed version of the Jacobson radical. Nakayama's Lemma. Nilpotent ideals. Nilpotency of the Jacobson radical of a right Artinian ring. Semiprime rings. Semiprimitive rings.
Dense subrings in the endomorphism ring of a vector space. Jacobson Density Theorem. Faithful modules. Primitive rings. Double Centralizer Theorem. Characterization of right Artinian simple rings. Minimal right ideals of a ring. Pierce decomposition. Hopkins Theorem. Semisimple rings and characterizations. Structure of semisimple rings. Wedderburn-Artin Theorem. Semisimple algebras. Semisimple algebras over algebraically closed fields. Finite-dimensional division algebras over a field. Mascke's Theorem. Representation theory of finite groups. Complement to the Jacobson radical of an algebra. Wedderburn-Malcev Theorem.
Basis of a module. Free modules. Projective modules. A module is projective if and only if it is a direct summand of a free module. A ring is semisimple if and only if all of its modules are projective. Indecomposable modules. Minimally potent right ideals of a ring. Projective indecomposable modules over right Artinian rings. Projective cover of a module.

REFERENCE TEXT BOOKS

I. M. Isaacs, Algebra. A graduate course. Brooks/Cole Publishing Company, California, 1994.
T. Y. Lam, A first course in noncommutative rings. Springer-Verlag, New York, 1991.
R. S. Pierce, Associative algebras. Springer-Verlag, New York, 1982.